« Problème de lieu dans l'espace » Niveau première S ou terminale S
(d'après l'exercice 96 page 374, Hyperbole, Première S 2005)

Partie I. Travail en salle informatique

Le même problème est proposé sous deux versions qui ne diffèrent que par le mode de construction du point dont on recherche le lieu géométrique.

Énoncé version 1

Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH.
M est un point segment [HF].
Le plan **P** passant par le point M et parallèle au plan (AED) coupe le segment [AC] en N. On désigne par I le milieu du segment [MN].
On se propose de déterminer le lieu du point I quand le point M décrit le segment [HF].

1. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Conjecturer le lieu du point I quand le point M décrit le segment [HF].
3. Chercher des pistes pour démontrer la conjecture.

Énoncé version 2

Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH.
M est un point segment [HF]. On désigne par N le point du segment [AC] tel que $AN = HM$. On désigne par I le milieu du segment [MN].
On se propose de déterminer le lieu du point I quand le point M décrit le segment [HF].

1. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Conjecturer le lieu du point I quand le point M décrit le segment [HF].
3. Chercher des pistes pour démontrer la conjecture.

Partie II. Débat de classe

Les échanges dans la classe sont à privilégier. Ils doivent permettre aux élèves de faire le point sur les différentes observations et de se mettre d'accord sur les outils qui peuvent être mobilisés.

Partie III. Démonstration

Le débat de classe peut faire apparaître plusieurs méthodes pouvant conduire à un devoir maison.

Version vectorielle :

On désigne par k le nombre réel de l'intervalle $[0;1]$ tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HF}$.
On appelle I_1 et I_2 les centres respectifs des faces ADHE et BCGF.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$.
2. **a.** Démontrer que $\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{I_1I}$ et $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{I_1I_2}$.

   b. En déduire que $\overrightarrow{I_1I} = k\overrightarrow{I_1I_2}$.

   c. Conclure.

Version barycentrique.

On désigne par k le nombre réel de l'intervalle $[0;1]$ tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HF}$.

1. Démontrer que le point M est le barycentre des points H et F affectés de coefficients que l'on précisera en fonction du réel k.
2. Démontrer que le point N est le barycentre des points A et C affectés de coefficients que l'on précisera en fonction du réel k.
3. En remarquant que le point I est l'isobarycentre des points M et N, démontrer que I est le barycentre des points pondérés $(I_1, 1-k)$ et (I_2, k).
4. Conclure.

Version analytique.

On munit l'espace du repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On désigne par k le nombre réel de l'intervalle $[0;1]$ tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HF}$.

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction du réel k.
2. Déterminer également les coordonnées du point N.
3. En déduire les coordonnées du point I.
4. Conclure.