

**Liaison école collège**

**Géométrie**

Dominique Verdenne  
Inspectrice de l'Education nationale

# Questions

---

- De quelles connaissances l'élève qui entre au collège a-t-il besoin pour l'apprentissage de la géométrie?
- Quelles sont les ruptures entre l'Ecole et le Collège?
- Sur quelles continuités prendre appui?

# Problème à résoudre

---

## □ Problème 1

- ↪ On connaît la longueur et la largeur d'un massif floral rectangulaire
- ↪ On souhaite déterminer la longueur de la diagonale du massif.
- ↪ Comment faire ?

# Trois modes de résolution

---

□ Résolution « pratique »

↪ mesure directe de la longueur de la diagonale sur le massif

□ Résolution « pratique »

↪ dessin à l'échelle sur une feuille de papier et mesure

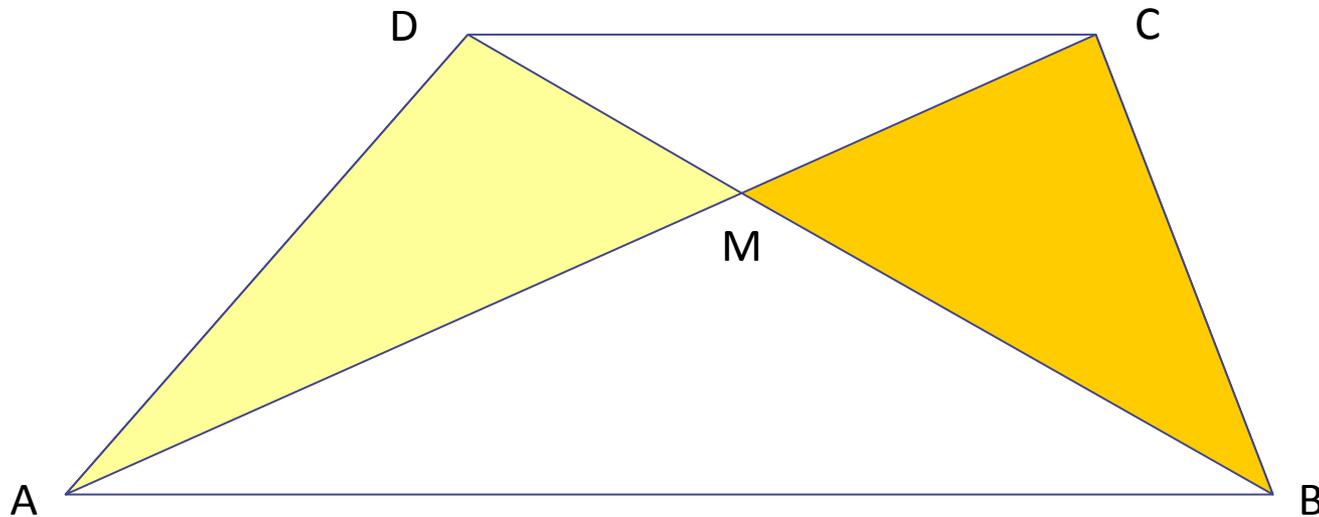
□ Résolution mathématique

↪ raisonnement utilisant des connaissances géométriques, théorème de Pythagore

## Problème 2

---

- ABCD est un trapèze de bases  $[AB]$  et  $[CD]$ , les diagonales se coupent en M.



- Les deux triangles ADM et BMC ont-ils la même aire?

# Quatre modes de résolution

---

Résolution perceptive

↪ estimation

Résolution pratique

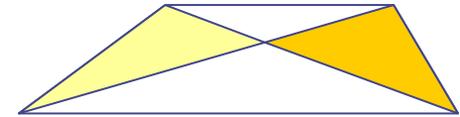
↪ découpage, collage ...

Résolution pratico-mathématique

↪ reconnaissance de figures, mesurage, calcul  
(formules)

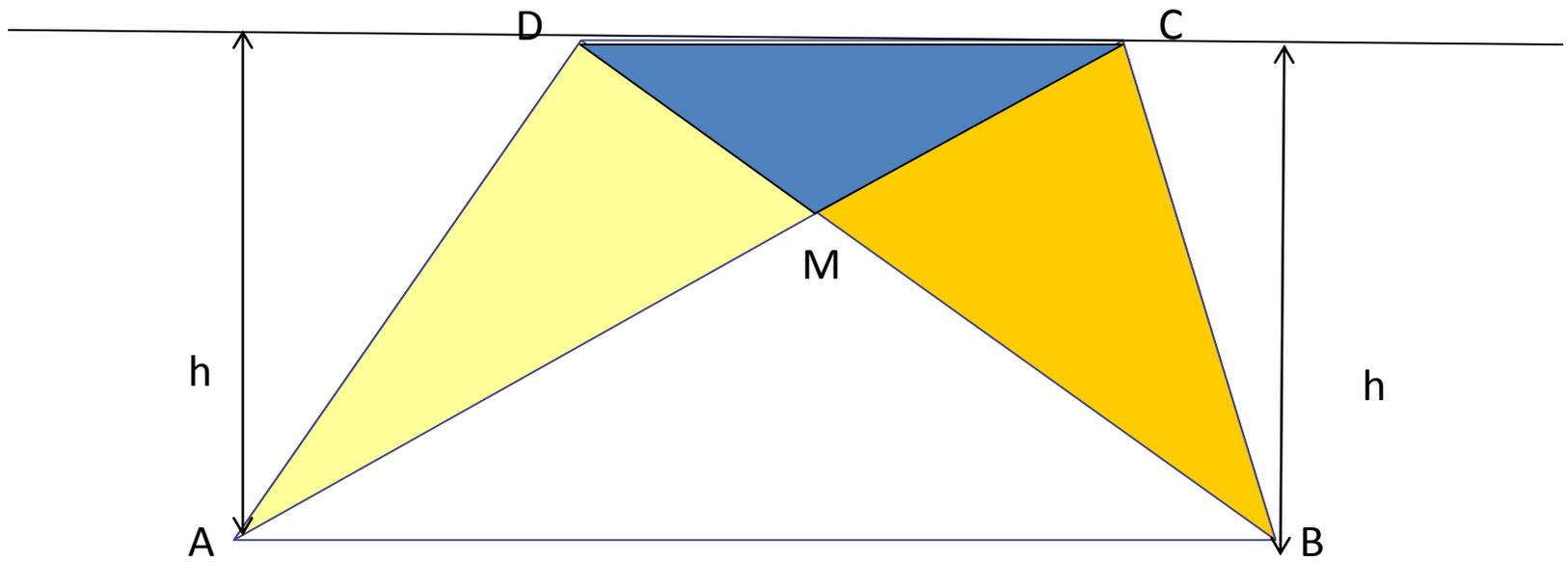
Résolution mathématique

↪ raisonnement



# Résolution mathématique

---

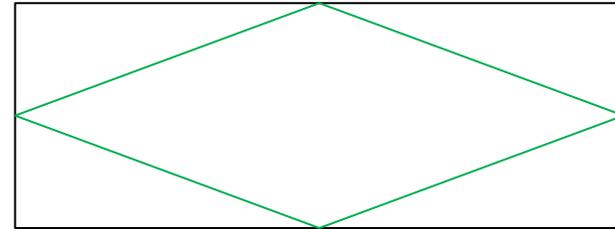


# L'apprentissage géométrique : une dynamique en trois temps

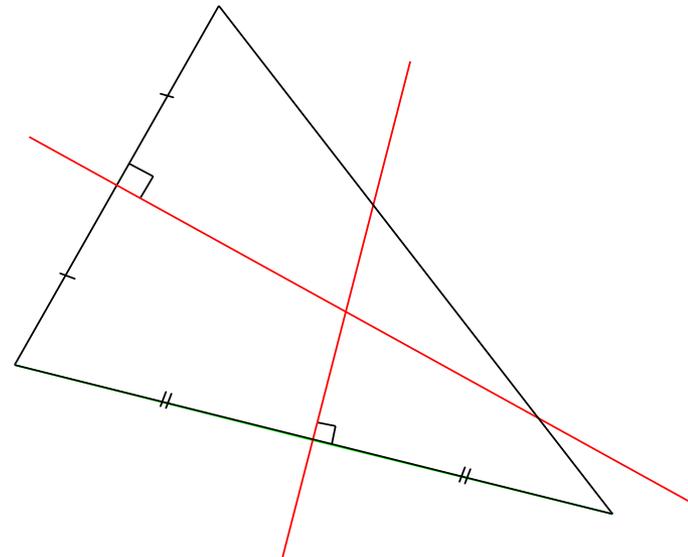
| <b>École maternelle, cycle 2</b>   | <b>Fin cycle 2, cycle 3</b>  | <b>Collège</b>   |
|--|--|--|
| Géométrie perceptive   | Géométrie instrumentée   | Géométrie déductive  |
| <b>Est vrai ce que je vois?</b><br><br><i>Boîte à outils</i> : œil, main | <b>Est vrai ce qui peut se contrôler à l'aide d'instruments?</b><br><br><i>Boîte à outils</i> : instruments :règle, compas, équerre, gabarits... | <b>Est vrai ce que je démontre?</b><br><br><i>Boîte à outils</i> : axiomes, définitions, théorèmes ... |

# Perception, instrumentation, démonstration

- Quelle est la nature d'un quadrilatère dont les sommets sont les milieux des côtés d'un rectangle



- Concours des médiatrices d'un triangle

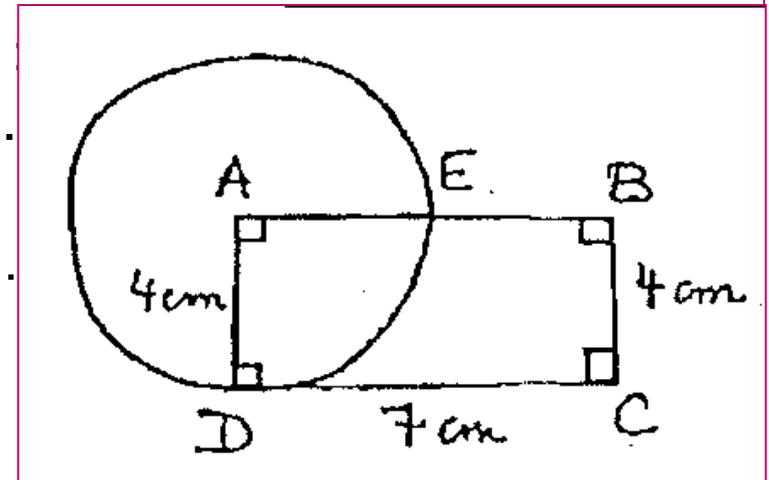


# Evaluation entrée sixième (1997)

Sur ce dessin à main levée (les grandeurs sont écrites en cm), on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.

Trouve la longueur du segment [EB]

Explique ta réponse :



Victor : 3,5 cm (le cercle est au milieu du segment)

26,3 %

Adrien : 1 cm 8 (j'ai mesuré)

16,6 %

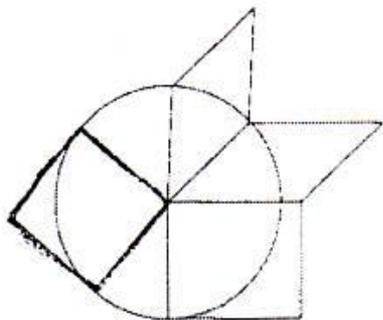
Lise : 3 cm (car  $7\text{ cm} - 4\text{ cm} = 3\text{ cm}$ )

10,3 %

# A l'entrée au collège (2004) ...

## Exercice 16

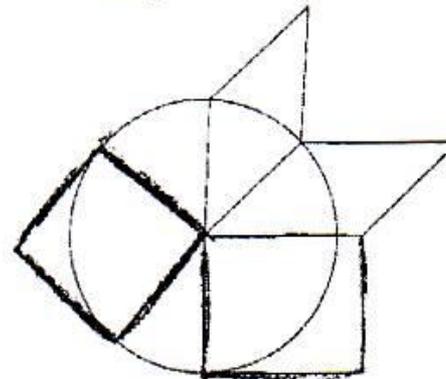
Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un losange de cette figure.

## Exercice 25

Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure.

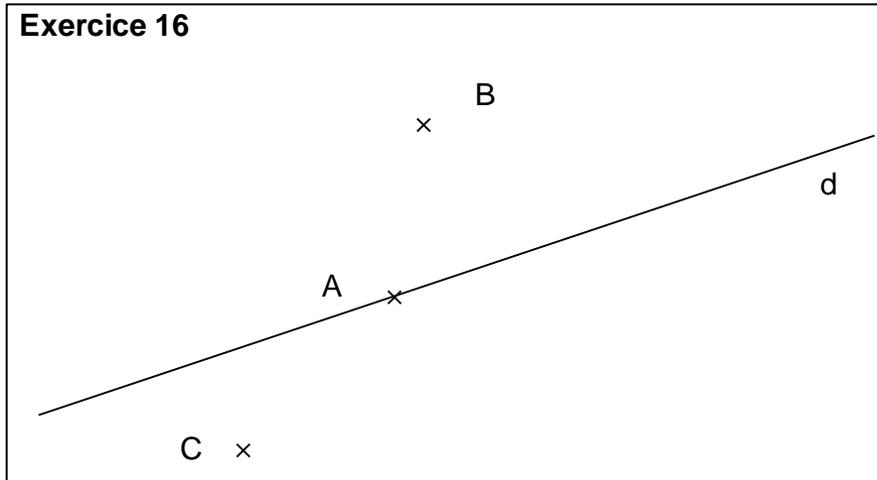
Réponse correcte : le carré est un losange, ici en position standard

Réponse oubliée : le losange en position non standard

Réponse correcte : carré, pourtant en position non standard

Réponse erronée : faux carré, mais ici en position standard

# Difficultés à l'entrée en 6ème



- 1- Trace la droite qui passe par les points A et C
- 2- Trace la droite qui passe par C et qui est perpendiculaire à la droite d
- 3- Trace la droite qui passe par B et qui est parallèle à la droite d

← **54 % + 40 %**  
segment

← **39 %**

← **50 %**

# Les lieux de rupture et difficulté

---

- ❑ Les différents niveaux de géométrie convoqués.
  - ↳ De l'espace sensible à l'espace géométrique
- ❑ Le statut de la représentation graphique: du dessin vers la figure: *obstacle épistémologique* (confusion objet tracé et objet mathématique),
- ❑ La nature des écrits
- ❑ Des concepts à consolider (symétrie, droite, parallélisme, perpendicularité ...)
- ❑ Des compétences techniques dans la manipulation des instruments encore fragiles
- ❑ Des difficultés dans la reconnaissance des figures de base (figures prototypiques)
- ❑ Vocabulaire : confusion ...

# Programmes

---

## □ Cycle 3

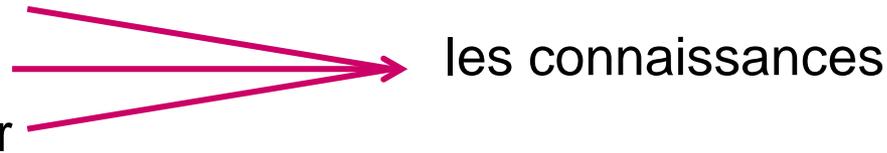
- ↪ Passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure

## □ Collège

- ↪ Stabiliser

Structurer

Hiérarchiser



- ↪ Développer les capacités à décortiquer et à construire des figures et solides simples à partir reconnaissance des propriétés simples
- ↪ Résoudre des problèmes dans les différents espaces de travail : espace sensible, feuille papier, écran
- ↪ Modéliser des situations et résoudre des problèmes posés dans l'espace sensible
- ↪ Liens avec l'espace sensible : architecture, art, nature, objets sociaux

# Programmes cycle 3

---

- ❑ Relations et propriétés géométriques : alignement, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, symétrie axiale, milieu d'un segment
- ❑ Utilisation d'instruments et de techniques
- ❑ Figures planes: carré, rectangle, losange, parallélogramme, triangles et ses cas particuliers, cercle
  - ↪ Description, reproduction, construction
  - ↪ Vocabulaire spécifique : côté, sommet, angle, diagonale, axe de symétrie, centre, rayon, diamètre
- ❑ Solides usuels
- ❑ Problèmes
  - ↪ reproduire ou construire des configurations géométriques diverses
  - ↪ mobiliser les propriétés des figures usuelles
  - ↪ utiliser à bon escient le vocabulaire spécifique et les démarches de mesurage et de tracés

# Programmes sixième

---

- ❑ **Figures planes** :  
notions de parallèle et perpendiculaires,  
cercle,  
propriétés des quadrilatères usuels,  
propriétés et construction triangles usuels,  
médiatrice d'un segment,  
bissectrice d'un angle,  
constructions géométriques: reproduction, construction de figures complexes
- ❑ **Symétrie orthogonale par rapport à une droite**
- ❑ **Parallélépipède rectangle** : patrons, représentation en perspective

# La géométrie à l'école

---

□ Ce que les programmes de l'école appellent « géométrie » renvoie à deux champs de connaissances :

↳ les connaissances que l'on va qualifier de « spatiales »

↳ les connaissances que l'on va qualifier de « géométriques »

cf Berthelot et Salin

# Les connaissances spatiales (1)

---

□ Celles qui permettent à tout individu de contrôler **perceptivement** ses rapports à l'espace et de résoudre un certain nombre de problèmes comme :

↳ se repérer, se diriger

↳ recueillir, mémoriser, communiquer des informations liées à des objets, des positions, des déplacements ...

## Les connaissances spatiales (2)

---

- ❑ Se rencontrent dans des situations d'actions dans **l'espace sensible**, de communication d'informations spatiales
  
- ❑ Exemples :
  - ↳ un jeune enfant joue avec un ensemble de solides qui peuvent s'insérer dans une boîte à formes. Il essaie puis modifie l'orientation de sa pièce pour la faire entrer dans le trou qu'il a choisi...
  - ↳ vous élaborez un trajet pour le communiquer à un tiers qui doit vous rejoindre en un point donné d'une ville qu'il ne connaît pas

# Les connaissances spatiales (3)

---

- Des connaissances mises en œuvre dans des « milieux » spatiaux qui demandent des adaptations spécifiques du sujet et renvoient des rétroactions propres.
  
- Brousseau propose une classification de ces différents milieux en trois types d'espace :
  - ↳ le macro-espace
  
  - ↳ le méso-espace
  
  - ↳ le micro-espace

# Du spatial au géométrique

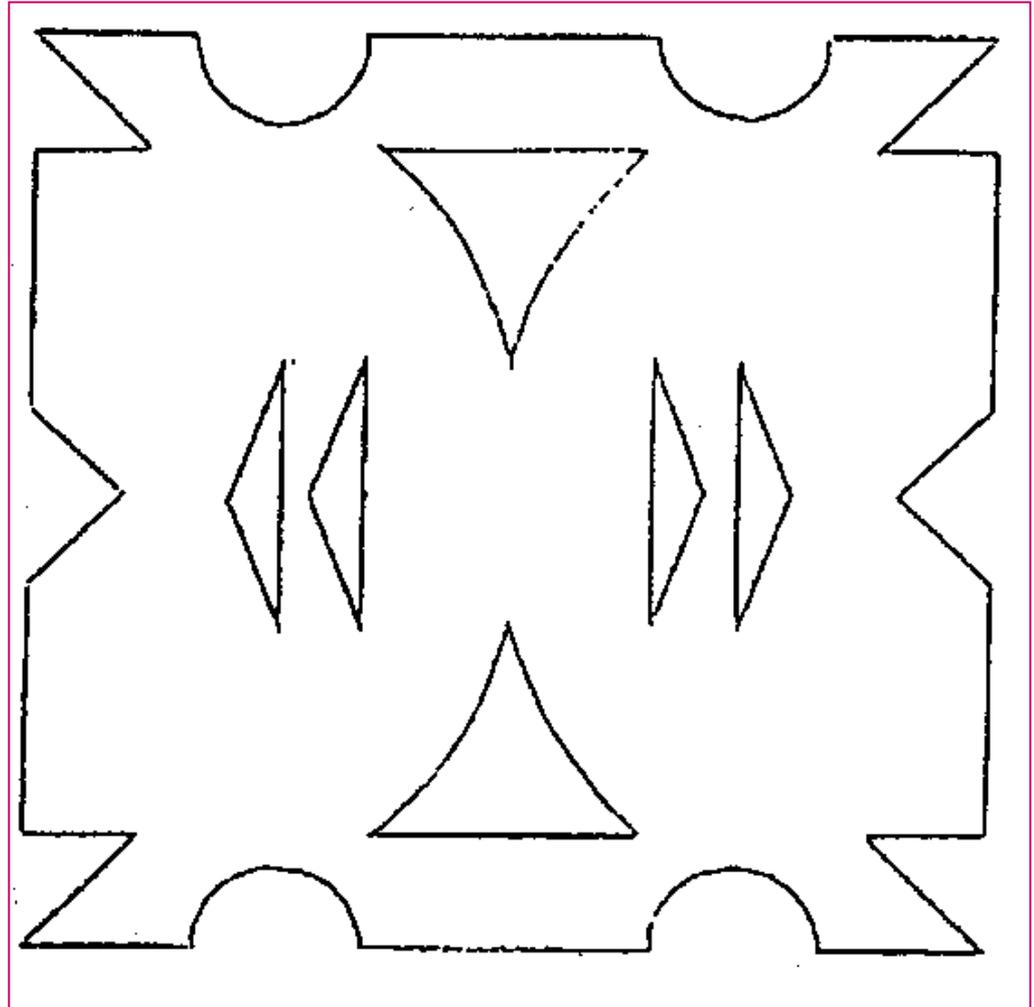
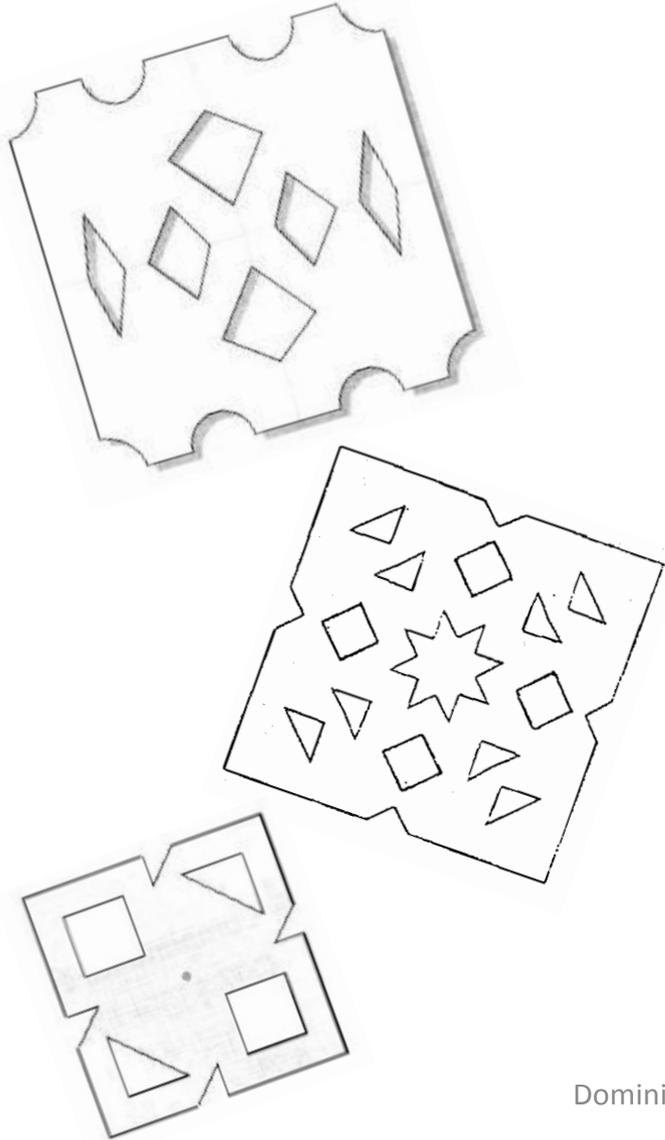
- ❑ *Organisation : travail individuel*
- ❑ *Durée : 20 minutes*
- ❑ *Consigne : Vous devez reproduire le napperon qui est affiché.*

Pour cela vous devez :

- ↪ effectuer **tous les pliages que vous jugez nécessaires**,
- ↪ puis, **sans déplier, vous devez effectuer tous les découpages que** vous jugez nécessaires,
- ↪ enfin vous déplierez et comparerez votre réalisation avec le modèle.
- ↪ S'il y a conformité, vous avez « gagné », sinon, vous conservez votre réalisation, *sans la froisser, sans la jeter*, pour pouvoir l'étudier et vous recommencez avec un autre papier .

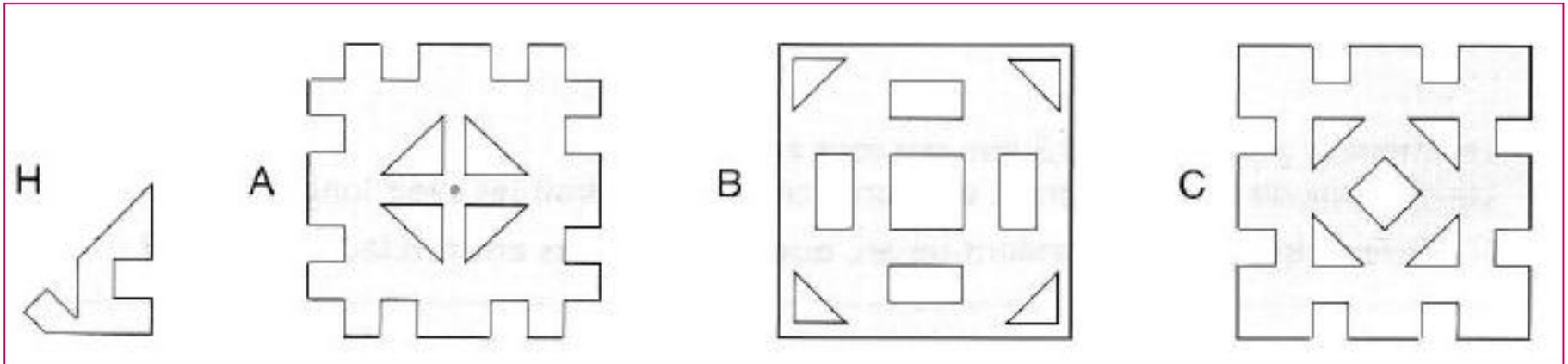
- ❑ Quels apprentissages en CM2, en 6<sup>ème</sup>?

# Le napperon



# Du spatial au géométrique

- ❑ Prévoir quel napperon on obtiendra quand on dépliera la carré H plié en 8?



# Le napperon (du côté des programmes)

## □ Au cycle 3 :

Symétrie axiale

Vocabulaire spécifique : axe de symétrie, ...

Problèmes de reproduction de configurations mobilisant la connaissance

des figures usuelles

## □ Au collège

Dans la continuité du travail entrepris à l'école élémentaire, les activités s'appuient **encore** sur un travail expérimental (pliage, papier calque) ...

# Les différents types de tâches

## C3

- Déterminer si une droite est axe de symétrie pour une configuration donnée
- Rechercher si une configuration possède ou non un axe de symétrie et le tracer
- Compléter une figure ou tracer le symétrique d'une figure par rapport à un axe de symétrie

↪ *Ces différents types de problèmes dépendent également de la position de l'axe de symétrie par rapport à la figure*

## 6ème

- Construire ou compléter la figure symétrique d'une figure donnée ou de figures possédant un axe de symétrie à l'aide de la règle, l'équerre, du compas, du rapporteur
- Effectuer les tracés de l'image d'une figure par symétrie axiale à l'aide d'instruments usuels.
- Construire le symétrique d'un point, d'une droite, d'un segment, d'un cercle (que l'axe coupe ou non la figure)

# Les constituants du savoir géométrique (1)

---

## Les objets

- Objets de base (mais pas premiers!)

  - ↪ Point, droite, segment, angle

- Polygones

  - ↪ Triangles et cas particuliers

  - ↪ Carré, rectangle, losange

  - ↪ Parallélogramme (angles, côtés mais pas diagonales)

- Cercle

- Polyèdres

  - ↪ Cube, pavé droit, pyramide, cylindre

# Les constituants du savoir géométrique (2)

---

## Les relations, les liens entre les objets (du plan)

- ❑ Relations spatiales
- ❑ Alignement et relations d'appartenance (incidence),
- ❑ Égalité de longueurs (milieu),
- ❑ Perpendicularité
- ❑ Parallélisme
- ❑ Égalité d'angles
- ❑ Symétrie, similitude d'objets (superposabilité avec ou sans retournement, agrandissement/réduction)
  - ↳ Étudier un objet, c'est étudier les relations qui le constituent ou qui le distinguent d'un autre
  - ↳ L'étude des relations va faciliter un passage à une géométrie plus théorique

# Les constituants du savoir géométrique (3)

□ Les objets

□ Les relations

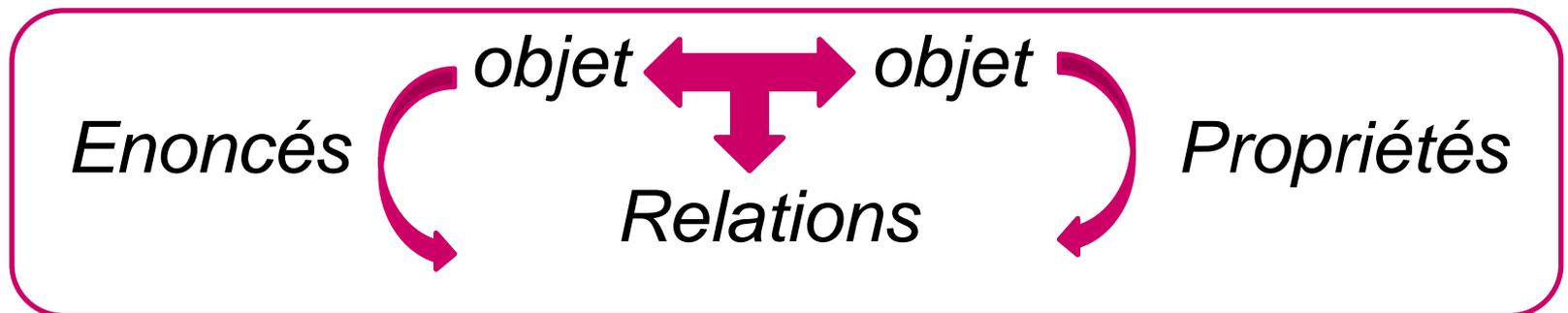
□ Les énoncés : les propriétés, les théorèmes

↪ ce sont les liens entre les objets et les relations,

↪ approche à l'Ecole (éléments de définition),

↪ spécificité du Collège.

*Exemple : propriété d'objet : le cube a 8 sommets*



# Quels problèmes ?

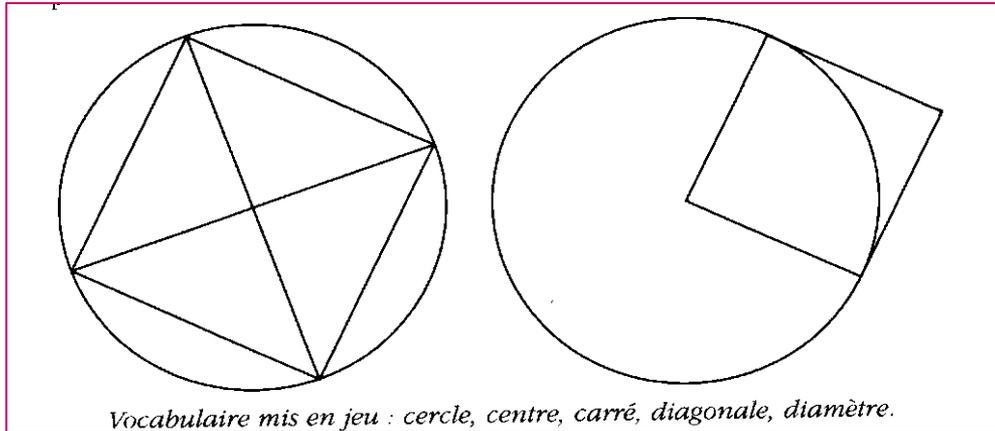
---

- Localiser : Décrire une position, repérer
- Reproduire
- ↪ Description verbale : informations ou programme de construction
- ↪ Description schématique (schéma codé avec cotes, à main levée ou non)
- Décrire : en vue de faire reproduire ou reconnaître
- Représenter, en vue de faire reproduire ou reconnaître
- Construire, à partir d'une description, d'un programme de construction, d'un schéma
- Classer
- Agrandir, réduire

 voir fiches « activités »

# Décrire pour ...

## □ Décrire pour reproduire



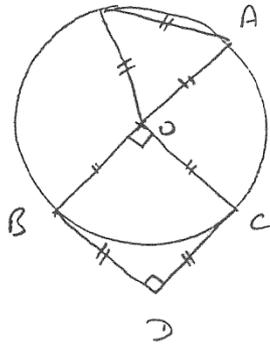
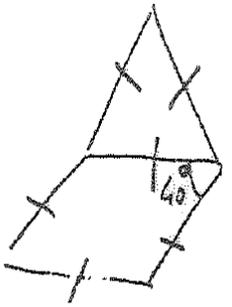
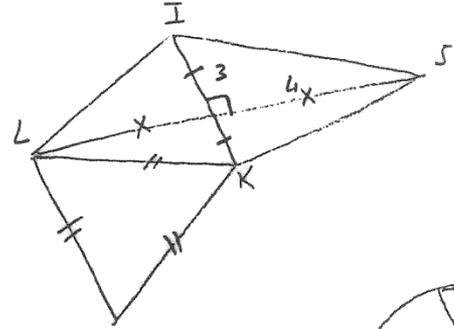
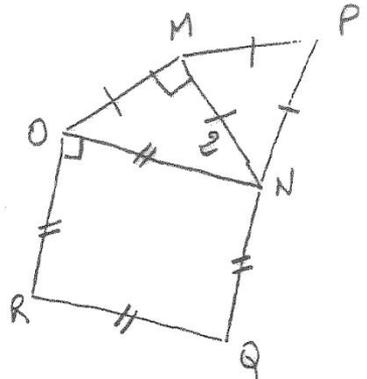
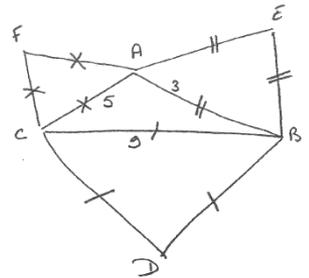
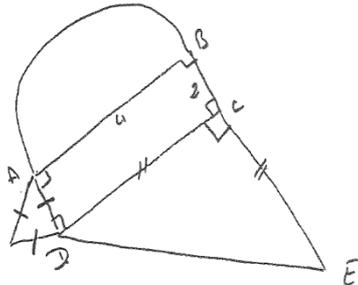
## □ Décrire pour construire : dictée géométrique (à l'oral)

«  $IJK$  est un triangle isocèle rectangle en  $I$ . Le côté  $[IJ]$  mesure  $6\text{cm}$ .  $[IJ]$  est le diamètre d'un demi-cercle extérieur au triangle.  $JKLM$  est le carré construit à l'extérieur du triangle ».

↪ Ne pas utiliser de mots pour la prise de notes...

↪ Utiliser le codage et produire une figure

# Exemples de figures pour dictées...



# Décrire pour reconnaître

---

## □ Les devinettes

« *Je suis un quadrilatère; je possède seulement deux axes de symétrie qui se coupent perpendiculairement. Qui suis-je? »*

« *Je suis un quadrilatère dont tous les côtés sont égaux. Qui suis-je? »*

## □ Les jeux du portrait

### □ Situation de construction, puis émission/réception (*Ermel Géométrie*)

↳ Construire une figure correspondant à la description suivante :

« La figure se compose d'un carré et d'un cercle tels que :

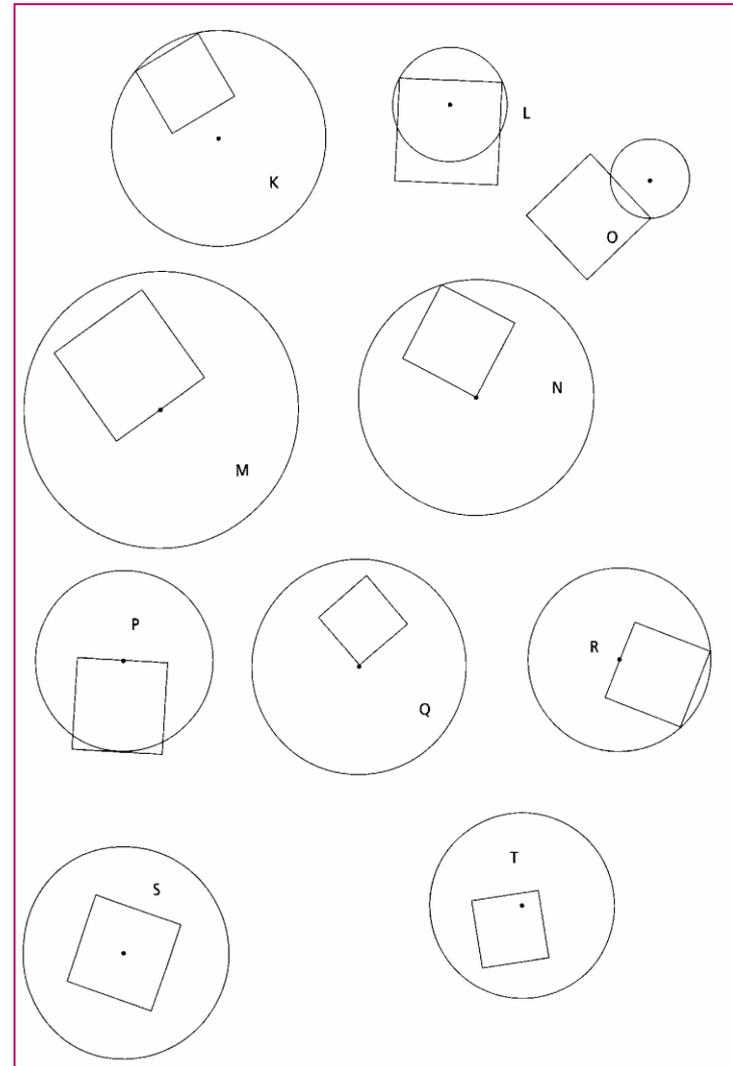
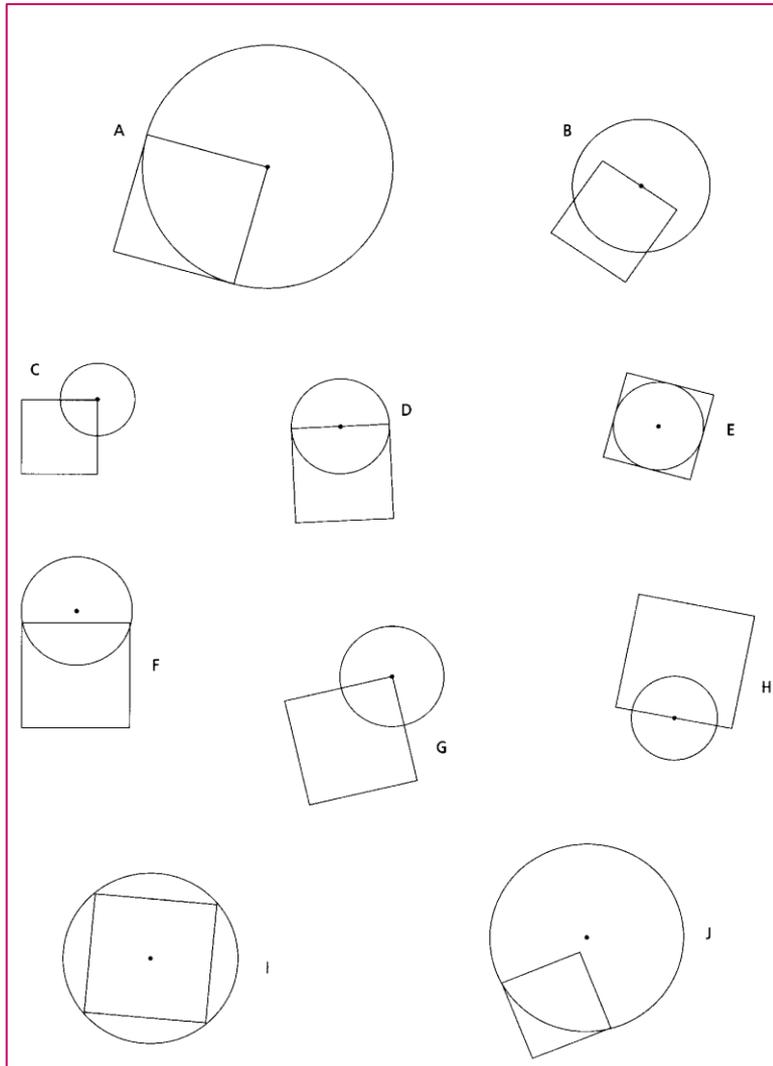
-le centre du cercle est le milieu d'un côté du carré,

-le cercle passe par deux sommets d'un carré. »

-deux constructions possibles : D et R (voir diapo suivante)

↳ Utiliser les figures qui suivent pour une situation de communication et travailler le vocabulaire (cercle, carré)

# Lots de figures pour une situation E/R



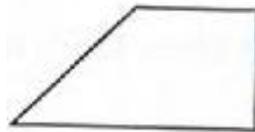
# Reconnaître une figure simple ...

... dans une configuration complexe

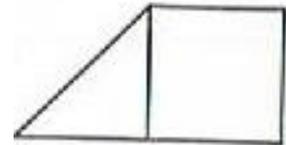
Décomposition d'une figure en d'autres figures simples

Par exemple:

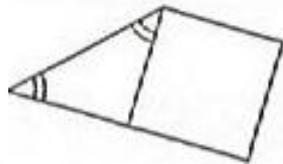
❑ « Dans cette figure,



je vois un carré et un triangle

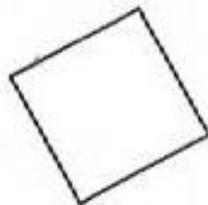


❑ Dans le triangle, mêmes.

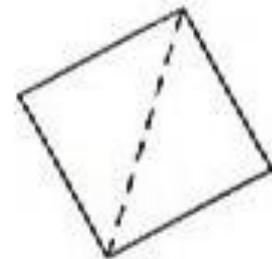


les deux angles sont les

❑ Dans le carré



, je vois deux triangles



. »

# Reproduire

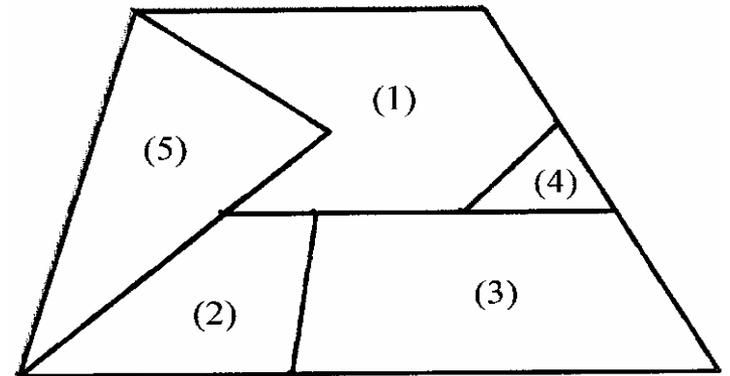
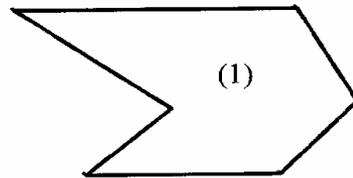
## Matériel utilisé

Une règle NON graduée et un crayon de papier (bien taillé!)

## Consigne

Observer le puzzle ci-contre.

A l'aide du matériel autorisé,  
reproduire ce puzzle à partir de la pièce 1.  
Laisser les tracés de construction.

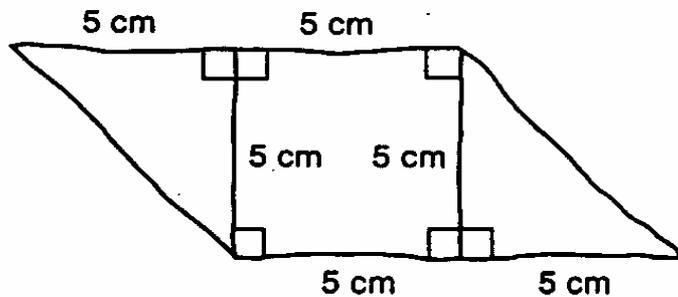


- ↳ Quelles sont les connaissances à mobiliser pour réussir?
- ↳ En quoi cette activité participe -t- elle à un passage à une géométrie plus théorique?

# Construire

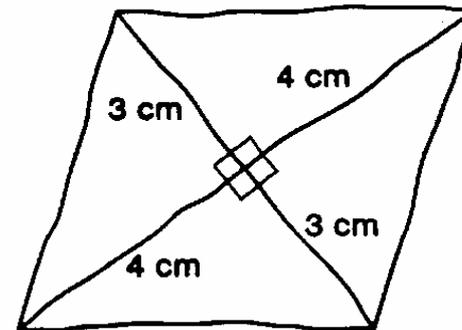
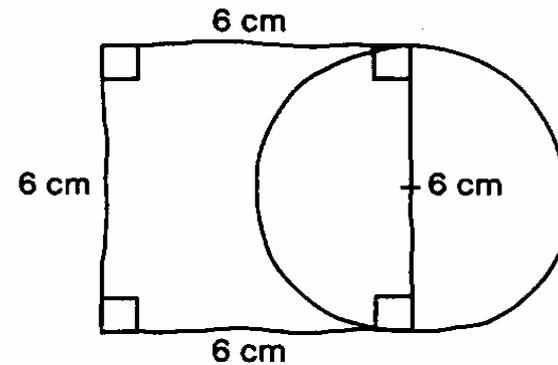
## Construire à partir d'un dessin à main levée

1. Voici un dessin à main levée d'une figure.  
Le dessin n'est pas en vraie grandeur.  
Construis cette figure en vraie grandeur sur papier uni, avec tes instruments de géométrie.

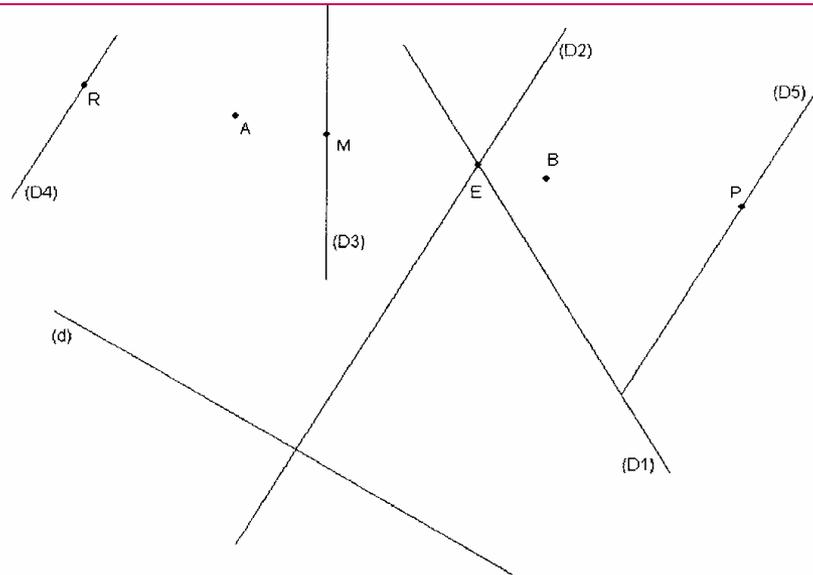


2. Voici un dessin à main levée d'une figure.  
Le dessin n'est pas en vraie grandeur.  
Construis cette figure en vraie grandeur avec tes instruments de géométrie.

2. Fais de même pour cet autre dessin à main levée.



# Construire



**Le PREMIER POINT CACHE.** Il y a quatre indices pour le retrouver.

- (*Indice 1*). Il est nommé.
- (*Indice 2*). Il est aligné avec les points **A** et **B**.
- (*Indice 3*). Il est sur une des droites dessinées perpendiculaires à la droite **(d)**.
- (*Indice 4*). Il n'est pas le point d'intersection des droites **(D1)** et **(D2)**.

**Le DEUXIEME POINT CACHE.** Il y a cinq indices pour le retrouver.

- (*Indice 1*). Il n'est pas nommé.
- (*Indice 2*). Il n'est pas aligné avec les points **A** et **B**.
- (*Indice 3*). Il est sur une des droites dessinées perpendiculaires à la droite **(d)**.
- (*Indice 4*). Il est sur la droite **(D1)**.
- (*Indice 5*). Il n'est pas sur la droite **(D5)**.

Une fois qu'il est trouvé, on le nomme **L**.

# Du dessin vers la figure

---

## □ Consigne :

« Vous devez dessiner à main levée tous les figures à quatre côtés différentes qui existent »

- Problème de recherche : trouver un maximum de figures
- Catégorisation des quadrilatères obtenus
- Faire évoluer le dessin spatial à la notion de figure mathématique
- Comprendre que ce sont les propriétés géométriques des figures qui permettent de les caractériser et non pas les propriétés métriques ou leur orientation dans le plan
- Trouver des moyens de coder les figures (codage conventionnel ou non suivant le niveau).

↳ (d'après *Ermel Géométrie*)

# Problèmes ouverts (1)

---

## □ Problème n° 1

Combien existe-t-il de quadrilatères dont 3 côtés mesurent 3 cm et un côté 10 cm?

## □ Problème n°2

Combien existe-t-il de quadrilatères dont deux côtés mesurent 6 cm et deux côtés 4 cm?

# Problèmes ouverts (2)

---

## □ Problème n° 3

Est-il possible de construire un triangle

↪ à un angle droit?

↪ à 2 angles droits ?

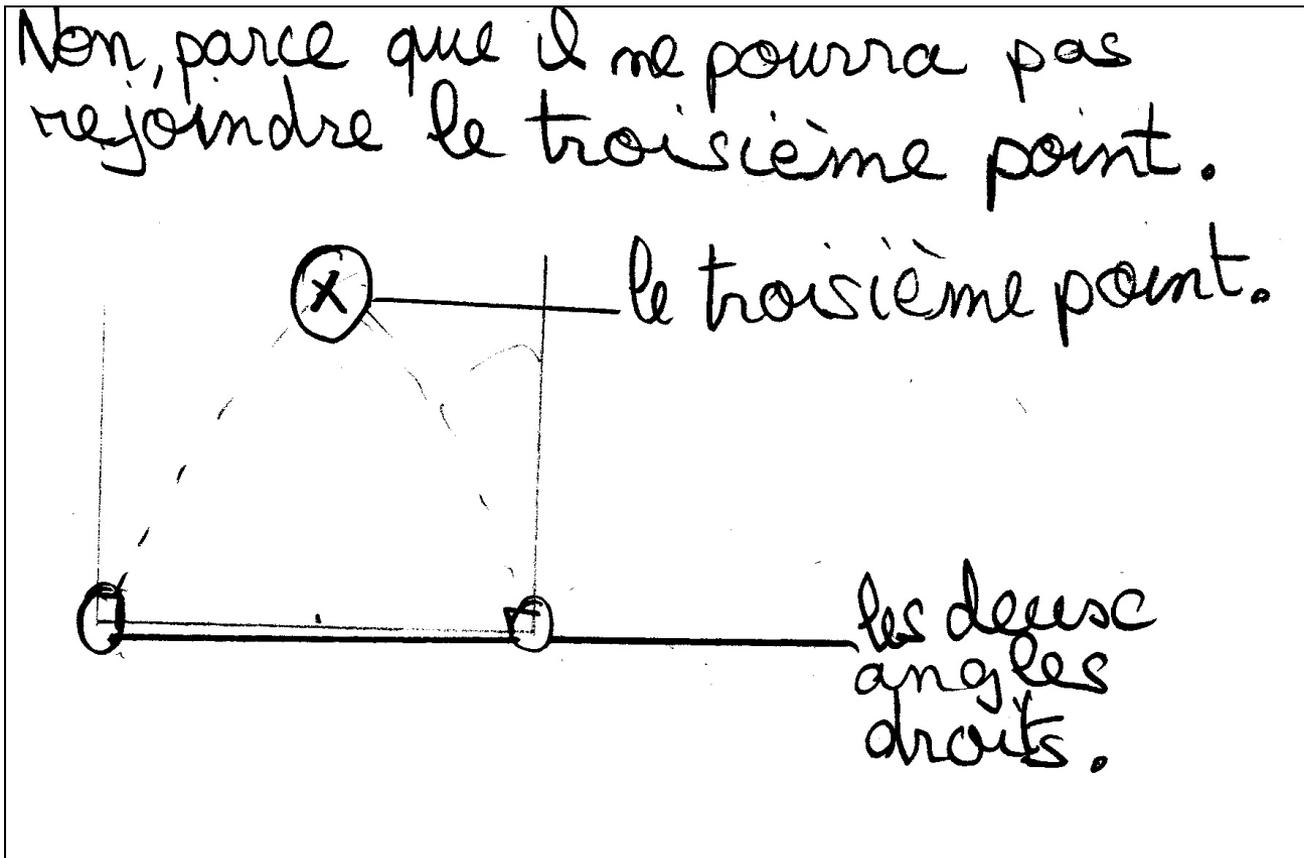
## □ Problème n°4

Est-il possible de construire un quadrilatère

↪ à deux angles droits?

↪ à trois angles droits?

# Problème n° 3

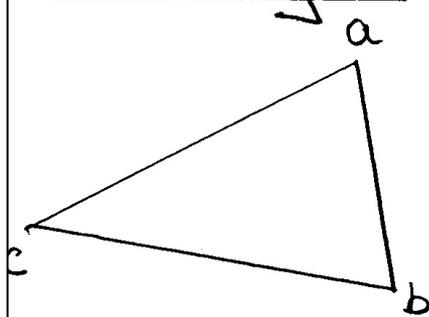


# Problème n°3

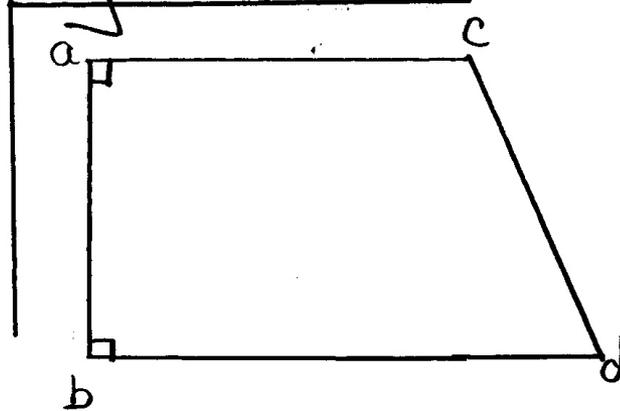
Existe-t-il un triangle qui a 2 angles droits?

Non car si il a 2 angles droits, il aura plus de 3 côtés. Donc ce ne sera pas un triangle parcequ'un triangle doit-avoir 3 côtés.

Un triangle :



Une figure a 2 angles droits :



# Problème n° 3

---

Non il ne peut pas y avoir un triangle à 2 angles droits car le triangle a trois côtés qui se referme mais si on fait 2 angles droits deux côtés sont forcément parallèles



# A propos du dessin à main levée

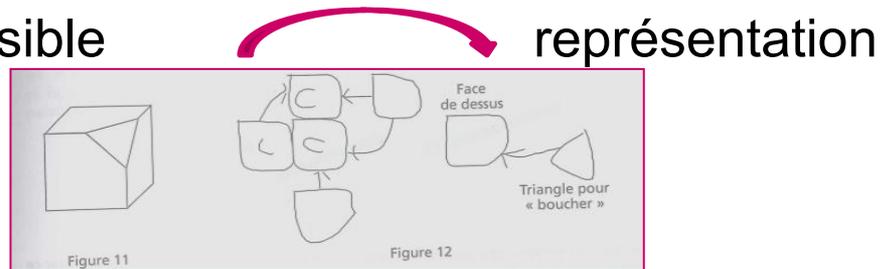
## ❑ Outil de communication et mémorisation

↳ solution économique et rapide pour prendre et conserver des informations

- ❖ Dictée géométrique
- ❖ Situation de communication

## ❑ Outil de modélisation

↳ de l'espace sensible



↳ de la représentation  
pragmatique)

↳ l'espace sensible (validation

## ❑ Aide à l'institutionnalisation et au changement de registre

↳ garder des traces de procédures

↳ le dessin comme aide à l'explicitation de procédures → production de connaissances

# Plusieurs aspects d'un même concept

---

A travers les concepts d'angle, de perpendicularité et de parallélisme, il s'agit envisager :

- ❑ les différentes significations de chacun d'eux,
- ❑ les liens qu'ils entretiennent avec les autres concepts géométriques ou les autres relations,
- ❑ les liens avec les instruments et les supports (équerre mais aussi téquerre, réquerre, gabarits d'angles, réseaux de droites parallèles...),
- ❑ quand ces significations sont abordées et approfondies tout au long de l'École du Socle.

# Différents aspects pour un même concept

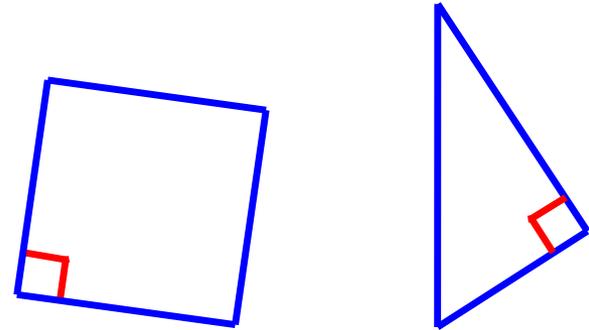
## □ La perpendicularité (1)

↪ Angle particulier

le coin d'un objet de référence  
(équerre)

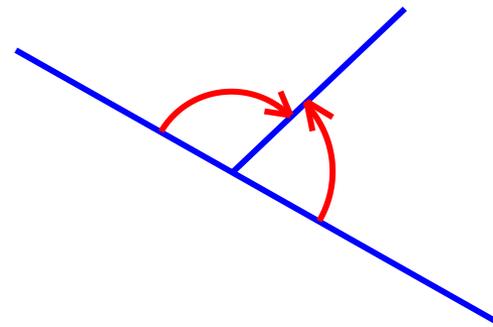
ou

d'une figure prototypique (carré, rectangle)



↪ Droite d'équilibre

ou angle demi-angle plat

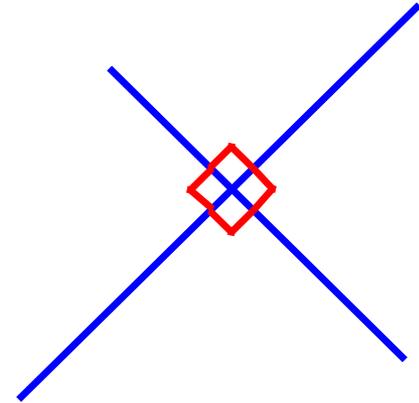


↪ Vertical/horizontal

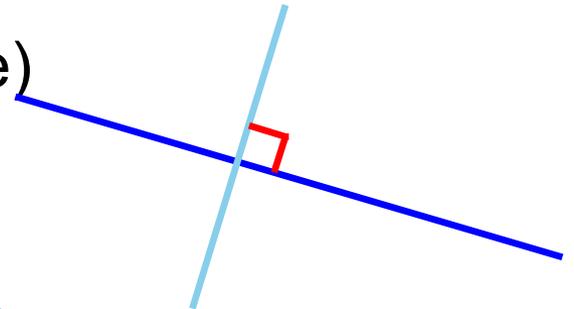
# Différents aspects pour un même concept

## □ La perpendicularité (2)

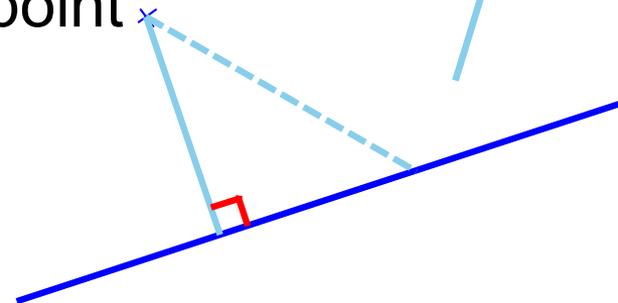
↪ Quatre angles égaux de même sommet et qui pavent le plan (quart de tour)



↪ Axe de symétrie d'une droite (pliage)



↪ Plus courte distance d'un point à une droite



*Tous les aspects ne relèvent pas de l'école*

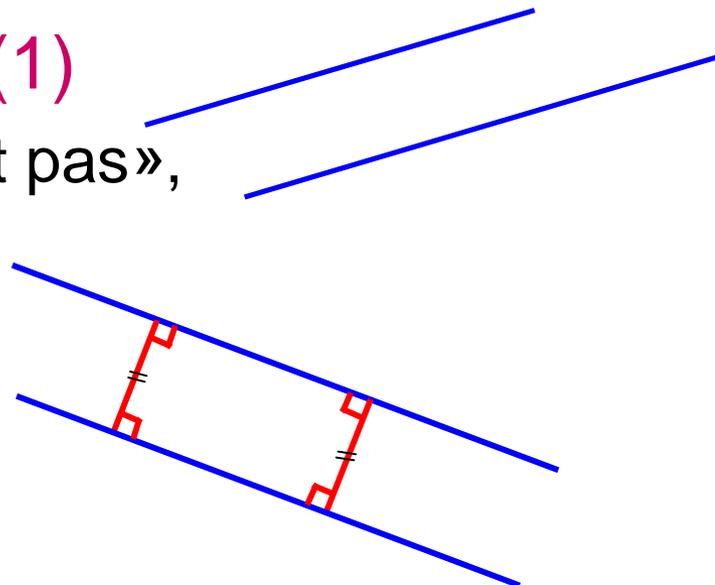
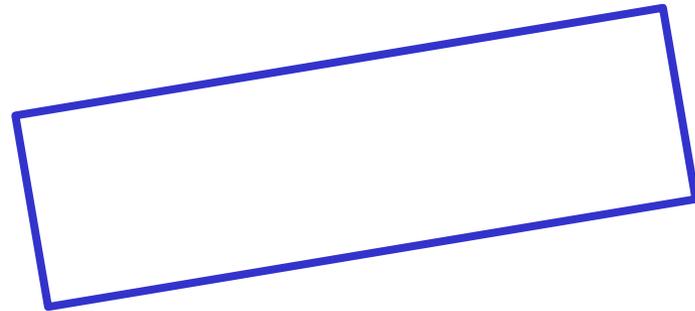
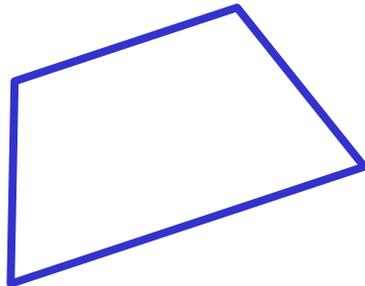
# Différents aspects pour un même concept

## □ Le parallélisme (1)

↪ « Ne se rencontrent pas »,  
non sécantes

↪ Ecart constant

↪ Deux droites support des côtés opposés de  
certaines figures



# Différents aspects pour un même concept

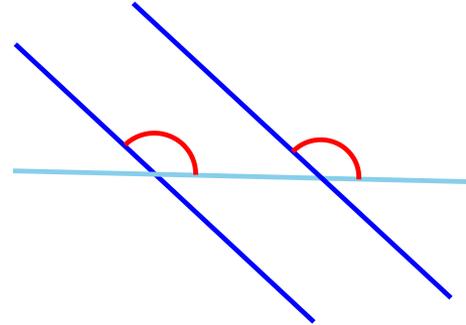
## □ Parallélisme (2)

↪ Même direction

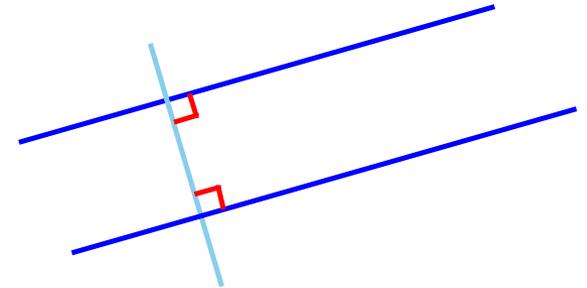
ou

même inclinaison

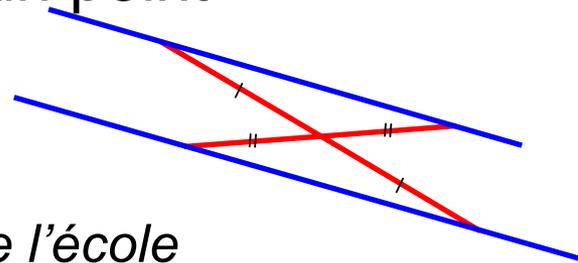
par rapport à une droite donnée



↪ Perpendiculaires à une même droite



↪ Symétriques par rapport à un point



*Tous les aspects ne relèvent pas de l'école*

# Des pistes ...

---

- ❑ Passer d'une reconnaissance perceptive à la justification des affirmations grâce à des propriétés,
- ❑ Passer du dessin à la figure : activités autour des figures à main levée, recours aux LGD,
- ❑ Activités reliées à des problèmes qui nécessitent de se détacher de la réalité sensible : production de texte à partir d'un dessin :  
« Les figures semblent ... peut-on en être sûr? Expliquer ce que l'on doit trouver pour en être sûr? »
- ❑ Travail sur les figures : voir et analyser
  - ↪ Prendre en compte des éléments de la figure qui ne sont pas visibles,
  - ↪ Analyser une figure en sous figures,
  - ↪ Aider les élèves « à voir ce qu'il faut géométriquement y voir »
- ❑ Situations de communication
- ❑ Problèmes posés dans un domaine plus « théorique »
- ❑ ...